



1 Studiare la funzione definita dalla legge

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \max\{x, 2x-1\}$$

- (i) determinarne il dominio e gli eventuali asintoti;
- (ii) studiare la derivabilità, determinare gli eventuali punti di estremo relativo e gli intervalli in cui è monotona.
- (iii) tracciare un grafico qualitativo di f ;
- (iv) Indicato con X il dominio di f , determinare il più piccolo valore di k tale che la restrizione di f all'insieme $X \cap [k, +\infty[$ sia invertibile. Per tale valore di k determinare il dominio della funzione inversa

2 Stabilire se l'insieme

$$X = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0, \pi] \wedge 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} + x \cos^2 x}{x} \right\}$$

è misurabile secondo Peano-Jordan. In caso affermativo, calcolarne la misura.

3 Studiare il carattere delle seguenti serie numeriche

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log \cos \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(2 - \sqrt{\frac{4n^x}{n^x + 1}} \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

4 (*Facoltativo*). Sia $\{a_n\}$ una successione numerica a termini non nulli. Provare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + a_n}{a_n} \in \mathbb{R} \implies \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \text{ non converge.}$$

E' vero il viceversa? Giustificare la risposta.

Durata: 2h 30 min.

Non si possono consultare libri o appunti.