Università degli Studi di Catania
Corso di Laurea in FISICA
Prova intermedia di Analisi Matematica 1
24 febbraio 2020

1.Rispondere ad almeno una delle seguenti domande:

(1) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$.

Si dice che A è *dotato di minimo* se ... (completare la definizione).

Si dice che A è *limitato inferiormente* se ... (completare la definizione).

Se A è limitato inferiormente, si chiama *estremo inferiore di A* ... (completare la definizione).

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Dimostrare quelle vere e portare un controesempio per quelle false.

- ☐ Se A è dotato di minimo allora A è limitato inferiormente ;
- ☐ se A è limitatato inferiormente allora A è dotato di minimo.

(2) Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. Completare le seguenti definizioni.

Si dice che $\{a_n\}$ *è di Cauchy* se ....

Si dice che $\{a_n\}$ *è limitata*, se ....

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Per quelle false portare un controesempio.

- ☐ Se $\{a_n\}$ è di Cauchy allora $\{a_n\}$ è limitata ;
- ☐ se $\{a_n\}$ è limitata allora $\{a_n\}$ è di Cauchy.

2. Rispondere ad almeno una delle seguenti domande:

(1) Enunciare e dimostrare il teorema sul limite delle funzioni monotone.

(2) Enunciare e dimostrare il teorema di Weierstrass.

3. Risolvere almeno uno dei seguenti esercizi:

(1) Studiare il carattere della successione

$$\left\{ \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \right\}.$$

(2) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti

$$\lim_{x \to +\infty} x^4 \left(1 + \frac{\sin^3 x}{x} \right), \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1 + x + x^2)}{\sqrt{x}(1 - \cos x)}.$$

4. Risolvere almeno uno dei seguenti esercizi:

(1) Sia $\{a_n\}$ una successione numerica tale che

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = (n^2 + 1)a_n \quad \forall n > 1.$$

Provare che

$$a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cosa si può dire del

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{a_n}?$$

(2) Data la funzione definita dalla legge

$$f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sqrt{\frac{x|x|}{x+2}} \right)^n$$

1) determinarne il dominio;
2) stabilire se f è prolungabile per continuità in $\mathbb{R}$ e, in caso affermativo, costruirne un prolungamento continuo.