



UNIVERSITÀ  
degli STUDI  
di CATANIA

Anno Accademico 2020/21

**Corso di Laurea in Fisica (L-30)**

Prova scritta di **Analisi Matematica 2**

21 giugno 2021

---

**1** Provare che la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2} \sin(n^2 x)$$

converge uniformemente in  $\mathbb{R}$ . Detta  $f$  la sua funzione somma

- i) provare che  $f$  è dotata di derivata seconda in  $\mathbb{R}$ ;
- ii) provare che  $f$  è dotata di derivata di ogni ordine in  $\mathbb{R}$ .

**2** Studiare la continuità, l'esistenza delle derivate parziali prime e la differenziabilità nel punto  $(0, 0)$  della funzione reale di due variabili reali definita dalla legge

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2y^2 - x^2}{x^2 + y^2} + 2y^2 - x & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ -1 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Determinare, se esistono, gli estremi assoluti nell'insieme

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

**3** Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\mathbf{F} = \left( \frac{3x}{x^2 + y^2 + 1}, -\frac{3y}{x^2 + y^2 + 1} \right)$$

lungo la frontiera del dominio

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, |y| \leq x\}$$

percorsa in senso antiorario.  $\mathbf{F}$  è conservativo?

**4** Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F} = (x^2 y, y x^2, x y z)$$

attraverso la frontiera del dominio

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - (x^2 + y^2)\}.$$

**5** Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^3 y''' - 2x^2 y'' + 3x y' - 3y = x^3 \log x \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = y''(1) = 0. \end{cases}$$

**Gli studenti che hanno superato la prova intermedia sono tenuti a svolgere solo gli esercizi 3, 4 e 5.**

**Durata: 3 ore**