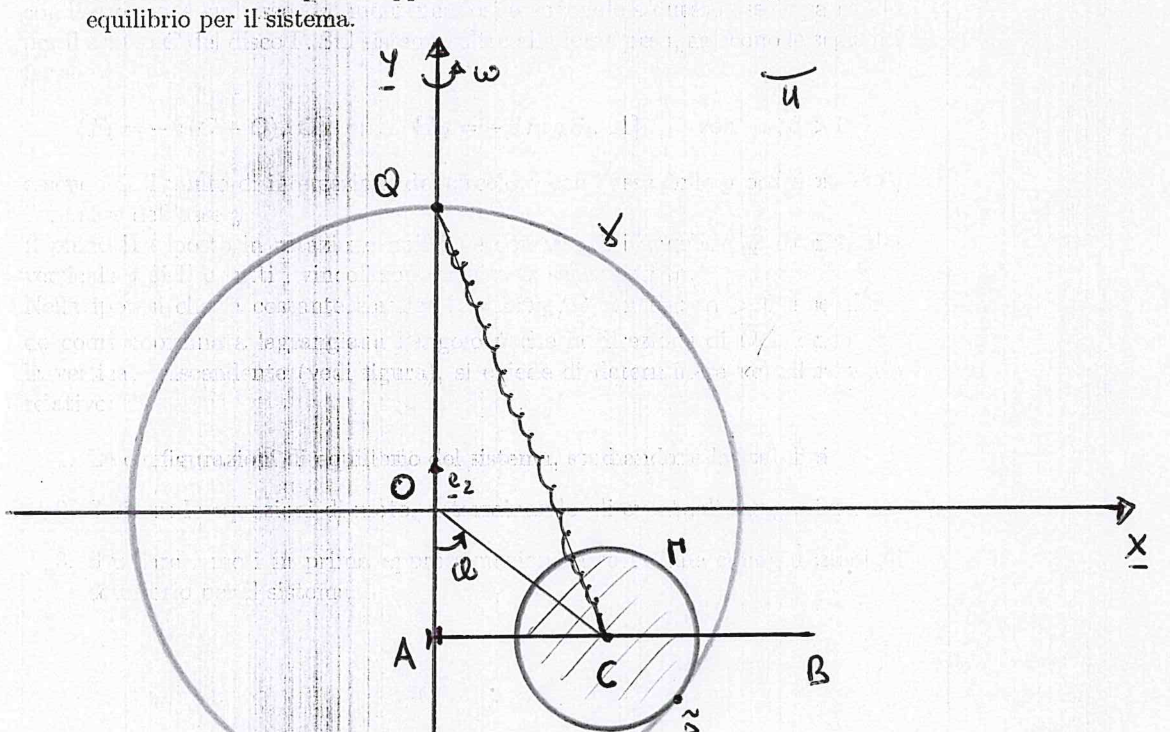
Università degli studi di Catania
Corso di laurea triennale in Fisica
Esame di Meccanica Analitica
Appello del 01.03.2019

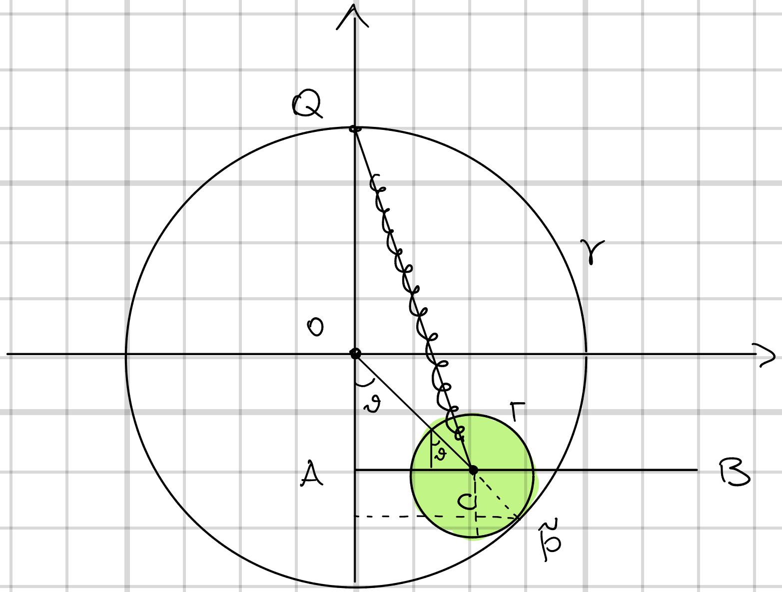
Un sistema materiale, posto in un piano verticale Π, é costituito da una sbarra rigida omogenea pesante AB di massa M e da un disco omogeneo pesante Γ di massa m, centro C e raggio r. Il disco Γ é vincolato a rotolare senza strisciare lungo il bordo interno di una guida circolare fissa γ di raggio $R > r$ e centro O posta in Π. Considerando il riferimento cartesiano ortogonale $\{O, \vec{x}, \vec{y}\}$, come in figura, l'asta AB, di lunghezza $L > R$, si muove lungo la direzione verticale y con l'estremo A sull'asse Oy, mantenendosi ortogonale a questo asse e passando per il centro C del disco Γ. Sul sistema, oltre alla forza peso, agiscono le seguenti forze

$$\{F_1 = -k\,(C - Q),\, C\} \qquad \{F_2 = -\beta\, m\, g\, \vec{e}_2,\, A\} \qquad \text{con} \quad k, \beta > 0$$

essendo Q il punto di intersezione del circolo γ con l'asse delle y positiva, ed $\vec{e}_2$ il versore dell'asse y.
Il piano Π é posto in rotazione uniforme con velocitá angolare $\underline{\omega}$ attorno alla verticale y di Π e tutti i vincoli sono realizzati senza attrito.
Nella ipotesi che la costante elastica $k = \alpha m g / R$ con $\beta > \alpha > 0$ e scegliendo come coordinata lagrangiana l'angolo ϑ che la direzione di $\overrightarrow{OC}$ forma con la verticale discendente (vedi figura), si chiede di determinare nel riferimento relativo:

1. Le configurazioni di equilibrio del sistema, studiandone la stabilitá.
2. Scrivere le equazioni di moto, determinando gli eventuali integrali primi.
3. Studiare i moti in prima approssimazione attorno alle configurazioni di equilibrio per il sistema.





$Q = (0, R)$
$A = (0, -(R-r)\cos\vartheta)$
$B = (L, -(R-r)\cos\vartheta)$
$C = ((R-r)\sin\vartheta, -(R-r)\cos\vartheta)$

$\tilde{P} = (R\sin\vartheta, -R\cos\vartheta)$

$F_1 = -k\,((R-r)\sin\vartheta, -R\cos\vartheta + r\cos\vartheta - R)$ ×
$F_2 = -\beta mg\,(0, 1)$ ×

$F_p^{\Gamma} = mg\,(0, -1)$ su C ×
$F_p^{AB} = Mg\,(0, -1)$ su $G = \left(\frac{L}{2}, -(R-r)\cos\vartheta\right)$ ×
$dF^{cent} = \omega^2\,(P - \bar{P})\,dm$ su ciascun punto P del sistema

$$U_p^{\Gamma} + U_p^{AB} = mg(0,-1)\cdot(C-O) + Mg\,(0,-1)\cdot(G-O) = mg\,(R-r)\cos\vartheta + Mg\,(R-r)\cos\vartheta = (m+M)(R-r)g\cos\vartheta$$

$$U_1 = -\frac{1}{2}k\,(C-Q)^2 = -\frac{1}{2}k\,\left((R-r)\sin\vartheta, \underline{-(R-r)\cos\vartheta - R}\right)^2 = -\frac{1}{2}k\left[(R-r)^2\sin^2\vartheta + (R-r)^2\cos^2\vartheta + 2R(R-r)\cos\vartheta + R^2\right] =$$
$$= -\alpha mg\,(R-r)\cos\vartheta + cost$$

$$U_2 = -\beta\,mg\,(0,1)\cdot(A-O) = \beta(R-r)mg\cos\vartheta$$

$$U_{cent}^{\Gamma} = \frac{1}{2}\omega^2\int_{\Gamma}(P-\bar{P})^2\,dm = \frac{1}{2}I_{y,O}^{\Gamma}\,\omega^2 =$$

$$I_{y,O} = m\,(C-A)^2 + \underbrace{I_{y,C}^{\Gamma}}_{+}$$

non dipende dalla coordinata lagrangiana

$$= \frac{1}{2}m\,(C-A)^2\omega^2 + cost. =$$
$$= \frac{1}{2}m\,(R-r)^2\,\omega^2\sin^2\vartheta$$

$$U^{AB}_{centr} = \frac{1}{2}\omega^2 \underbrace{\int_A^B (P-A)^2\, dm}_{I^{AB}_{y,A}}$$

$$I^{AB}_{y,A} = \int_A^B x^2 \lambda\, dx = \frac{m}{L}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L = \frac{1}{3} mL^2$$

$$U^{AB}_{centr} = cost$$

$$U = (m+M)(R-r)g\cos\vartheta - \alpha mg(R-r)\cos\vartheta + \beta(R-r)mg\cos\vartheta + \frac{1}{2}m(R-r)^2\omega^2\sin^2\vartheta + cost$$

$$Q_\vartheta = -(m+M)(R-r)g\sin\vartheta + \alpha mg(R-r)\sin\vartheta - \beta(R-r)mg\sin\vartheta + m(R-r)^2\omega^2\sin\vartheta\cos\vartheta =$$

$$= \left[-(m+M)(R-r)g + \alpha mg(R-r) - \beta(R-r)mg + m(R-r)^2\omega^2\cos\vartheta\right]\sin\vartheta = 0 \iff \vartheta = 0, \pi$$

$$\left[-\delta g + \omega^2(R-r)\cos\vartheta\right](R-r)m\sin\vartheta > 0$$

$$\cos\vartheta = \frac{\beta mg - \alpha mg + (m+M)g}{m\omega^2(R-r)} =$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{M}{m} + \beta - \alpha\right)mg}{m\omega^2(R-r)} = \frac{\delta g}{\omega^2(R-r)}$$

$$\frac{\delta g}{\omega^2(R-r)} < 1 \qquad \delta < \frac{\omega^2(R-r)}{g}$$

Se $\delta < \frac{\omega^2(R-r)}{g}$ Configurazioni di equilibrio $\{0, \pi, \hat\vartheta, -\hat\vartheta\}$ essendo $\hat\vartheta = \arccos\frac{\delta g}{\omega^2(R-r)}$

Se $\delta > \frac{\omega^2(R-r)}{g}$ $\{0, \pi\}$

$$U_{\vartheta\vartheta} = -(m+M)(R-r)g\cos\vartheta + \alpha mg(R-r)\cos\vartheta - \beta(R-r)mg\cos\vartheta + m(R-r)^2\omega^2\cos 2\vartheta$$

$$U_{\vartheta\vartheta}(0) = -(m+M)(R-r)g + \alpha mg(R-r) - \beta(R-r)mg + m(R-r)^2\omega^2 =$$

$$= (R-r)m\left[\left(-1-\frac{M}{m}+\alpha-\beta\right)g + (R-r)\omega^2\right] = (R-r)m\left[(R-r)\omega^2 - \delta g\right] > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\omega^2(R-r) - \delta g > 0$$

$$\omega^2(R-r) > \delta g$$

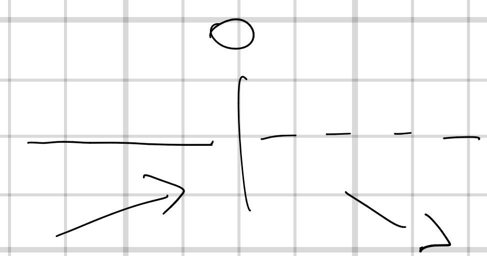
$$\frac{\delta g}{\omega^2(R-r)} < 1$$

$\vartheta = 0$ stabile se $\frac{\delta g}{\omega^2(R-r)} > 1$, instabile se $\frac{\delta g}{\omega^2(R-r)} < 1$

Se $\frac{\delta g}{\omega^2(R-r)} = 1$

$$\left[-\delta g + \omega^2(R-r)\cos\vartheta\right](R-r)m\sin\vartheta > 0$$

$$\underbrace{\left[-1+\cos\vartheta\right]}_{<0}\omega^2(R-r)^2 m\sin\vartheta > 0 \iff \pi < \vartheta < 2\pi$$



$\vartheta = 0$ è max del potenziale $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ equilibrio stabile

$U_{\vartheta\vartheta}(\pi) = (m+M)(R-r)g - \alpha mg(R-r) + \beta(R-r)mg + m(R-r)^2\omega^2 > 0 \implies \pi$ è instabile

Detto $\lambda = \dfrac{\delta g}{\omega^2(R-r)}$ $\quad U_{\vartheta\vartheta}(\hat\vartheta) = U_{\vartheta\vartheta}(-\hat\vartheta) = m(R-r)^2\omega^2\left[-\lambda^2 + 2\lambda^2 - 1\right] =$

$= m(R-r)^2\omega^2[\lambda^2 - 1] < 0$ perché $\lambda = \dfrac{\delta g}{\omega^2(R-r)} < 1 \implies \hat\vartheta$ e $-\hat\vartheta$ stabili

Energia cinetica

$$T^{AB} = \frac{1}{2}M\dot{G}^2 = \frac{1}{2}M(R-r)^2\sin^2\vartheta\,\dot\vartheta^2$$

$$T^{\Gamma} = \frac{1}{2}m\dot{C}^2 + \frac{1}{2}I^{\Gamma}_{z,C}\,\Omega^2 = \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot\vartheta^2 + \frac{1}{4}mr^2\Omega^2$$

$$I_{z,C} = \iint \rho^2\,dm = \iint \rho^2\,\sigma\,\rho\,d\rho\,d\alpha = \frac{m}{\pi r^2}\int_0^r \rho^3 d\rho\int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{m}{\pi r^2}\,\frac{r^4}{4}\,2\pi = \frac{1}{2}mr^2$$

$$v_{\tilde P} = 0 = \dot{C} + \Omega \times (\tilde P - C)$$

$$\begin{vmatrix} \hat\imath & \hat\jmath & \hat k \\ 0 & 0 & \Omega \\ r\sin\vartheta & -r\cos\vartheta & 0 \end{vmatrix}$$

$$(r\cos\vartheta\,\Omega,\ r\sin\vartheta\,\Omega,\ 0)$$

$\tilde P = (R\sin\vartheta, -R\cos\vartheta)$

$C = ((R-r)\sin\vartheta, -(R-r)\cos\vartheta)$

$\dot C = ((R-r)\cos\vartheta\,\dot\vartheta, (R-r)\sin\vartheta\,\dot\vartheta) = (r\cos\vartheta\,\Omega, r\sin\vartheta\,\Omega, 0)$

$(R-r)\cos\vartheta\,\dot\vartheta = r\cos\vartheta\,\Omega$

$(R-r)\sin\vartheta\,\dot\vartheta = r\sin\vartheta\,\Omega \quad \rightarrow \quad \Omega = \dfrac{R-r}{r}\dot\vartheta$

Energia si conserva

$E = T - U$

$$T^{\Gamma} = \frac{1}{2} m (R-r)^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{4} m (R-r)^2 \dot{\vartheta}^2 = \frac{3}{4} m (R-r)^2 \dot{\vartheta}^2$$

$$T = \frac{1}{2} M (R-r)^2 \sin^2\vartheta \, \dot{\vartheta}^2 + \frac{3}{4} m (R-r)^2 \dot{\vartheta}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = M (R-r)^2 \sin^2\vartheta \, \dot{\vartheta} + \frac{3}{2} m (R-r)^2 \dot{\vartheta}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = M (R-r)^2 \sin^2\vartheta \, \ddot{\vartheta} + 2M (R-r)^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \, \dot{\vartheta}^2 + \frac{3}{2} m (R-r)^2 \ddot{\vartheta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \vartheta} = M (R-r)^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \, \dot{\vartheta}^2$$

$$\left[\frac{3}{2} m + M \sin^2\vartheta\right] \cancel{(R-r)^2} \ddot{\vartheta} + M \cancel{(R-r)^2} \sin\vartheta \cos\vartheta \, \dot{\vartheta}^2 = [-\lambda + \cos\vartheta] \, m \omega^2 \cancel{(R-r)^2} \sin\vartheta$$

$$\left[\frac{3}{2} m + M \sin^2\vartheta\right] \ddot{\vartheta} + \underline{M \sin\vartheta \cos\vartheta \, \dot{\vartheta}^2} = \underline{m \omega^2 \sin\vartheta (\cos\vartheta - \lambda)}$$

Moti linearizzati

$$\frac{3}{2} m\ddot{\vartheta} = \cancel{Q_\vartheta\big|_s} + U_{\vartheta\vartheta}\big|_s (\vartheta-\vartheta_s)$$

S_1 $\quad \vartheta = 0$

$$\frac{3}{2} m\ddot{\vartheta} = m\left[\omega^2 - \delta g\right]\vartheta = m\omega^2\left[1-\lambda\right]\vartheta$$

$$\frac{3}{2} m\tau^2 = m\omega^2(1-\lambda) \rightarrow \tau^2 = \frac{2\,\omega^2(1-\lambda)}{3} > 0 \iff \lambda < 1$$

$\lambda < 1$ moti iperbolici
$\lambda > 1$ moti armonici

$\lambda = 1$ moti uniformi $\rightarrow$ non ha senso la linearizzazione

S_2 $\quad \vartheta = \pi$

$$\frac{3}{2} m\ddot{\vartheta} = m\,\omega^2\left[\frac{\delta g}{\omega^2(R-r)^2} + 1\right](\vartheta-\pi)$$

Cerco soluzioni $\vartheta - \pi = \vartheta_0 e^{\tau t}$

$$\tau^2 = \frac{2}{3}\omega^2\left(\frac{\delta g}{\omega^2(R-r)^2}+1\right) > 0 \Rightarrow \text{moti iperbolici}$$

$0<\lambda<1$

S_3 $\quad \vartheta = \hat{\vartheta}$

$$\frac{3}{2} m\ddot{\vartheta} = m\,\omega^2\left[\lambda^2-1\right](\vartheta-\hat{\vartheta}) \qquad \vartheta - \hat{\vartheta} = \vartheta_0 e^{\alpha t}$$

$$\frac{3}{2} m\alpha^2 = m\omega^2(\lambda^2-1) \qquad \alpha^2 = \frac{2}{3}\omega^2(\lambda^2-1) < 0 \Rightarrow \text{moti armonici}$$

$\Updownarrow$

$0<\lambda<1$

Analoghe considerazioni valgono per $\vartheta = -\hat{\vartheta}$