Università degli studi di Catania
Corso di laurea triennale in Fisica
Esame di Meccanica Analitica
Appello del 25.09.2020

In un piano verticale Π, si consideri un riferimento fisso $\{O, x, y\}$ ed una guida circolare fissa γ, di centro O e raggio R. Sempre nel piano verticale Π sia dato un sistema meccanico, illustrato in figura, costituito da un disco circolare Γ omogeneo di massa m, raggio $R/3$ e centro C, e da una sbarra rettilinea omogenea di massa $2m$, lunghezza R ed estremi A e B. Il disco Γ rotola senza strisciare sul bordo interno della guida circolare γ, mentre l'estremo A della sbarra é vincolato a scorrere lungo l'asse x ed il secondo estremo B si mantiene sulla guida circolare γ, in posizione diametralmente opposta al centro C del disco Γ. Sul sistema oltre alla forza peso nella direzione verticale discendente, agiscono anche le due forze

$$\{\mathbf{F}, C\} \qquad \text{e} \qquad \{-\mathbf{F}, A\} \qquad \text{con} \qquad \mathbf{F} = -k\,(C - A), \qquad \text{essendo} \qquad k > 0.$$

Supposto che il piano Π sia posto in rotazione uniforme con velocitá angolare ω attorno alla retta y, che i vincoli siano realizzati senza attrito con la condizione $k = m\,\omega^2$, ed utilizzando come variabile lagrangiana l'angolo ϑ, come riportato in figura, si chiede di determinare nel riferimento relativo:

1. Tutte le possibili configurazioni di equilibrio, discutendone la loro stabilitá ed instabilitá.

2. L'equazione del moto, determinando gli eventuali integrali primi.

3. Si stabilisca inoltre, motivando la risposta, se la funzione reale

$$\mathbf{G}(\vartheta, \dot{\vartheta}) = T(\vartheta, \dot{\vartheta}) - 2\,U(\vartheta), \qquad (\vartheta, \dot{\vartheta}) \in \mathbb{R}^2.$$

   costituisca o meno un integrale primo del sistema, essendo $T(\vartheta, \dot{\vartheta})$ ed $U(\vartheta)$ rispettivamente l'energia cinetica totale ed il potenziale totale.

4. I moti, in prima approssimazione, attorno alle diverse configurazioni di equilibrio.