

Università degli studi di Catania  
 Corso di laurea Triennale in Matematica  
 Prova scritta di Fisica Matematica  
 Appello del 23.12.2021

Un piano verticale  $\Pi$  ruota uniformemente, con velocità angolare  $\vec{\omega}$  attorno ad una sua retta verticale  $r$ .

Tale piano coincide con il piano coordinato  $xy$  di un riferimento ortonormale levogiro  $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \equiv \{O, x, y, z\}$  con l'asse delle  $y$  verticale ascendente sovrapposto alla retta  $r$  (vedi figura).

In  $\Pi$  è mobile un disco  $S$  omogeneo, di massa  $m$ , raggio  $R$  e centro  $G$ , avente un estremo  $A$  di un suo diametro vincolato a muoversi sull'asse delle  $x$ .

Scegliendo come parametri lagrangiani le coordinate generali  $\{X, \vartheta\}$ , dove  $X$  l'ascissa del baricentro di  $S$  e  $\vartheta$  l'angolo che il vettore  $(G - A)$  forma con la verticale discendente (vedi figura), e che su  $S$ , oltre alla forza peso, agiscono le forze

$$\{F_1 = -K(G - \bar{G}), G\} \quad \text{ed} \quad \{F \vec{e}_1, B\} \quad \text{con} \quad K > 0, \quad F \geq 0$$

essendo  $\bar{G}$  la proiezione ortogonale di  $G$  sull'asse delle  $y$ ,  $B$  il punto del disco tale che  $(B - G) = \vec{e}_3 \wedge (A - G)$ .

Nella ipotesi che i vincoli siano realizzati senza attrito, si chiede di:

1. Determinare sotto quali condizioni sui parametri non esistono configurazioni di equilibrio relativo per  $S$ .
2. Escludendo il caso di cui al punto 1. determinare tutte le possibili configurazioni di equilibrio relativo di  $S$ , analizzando la stabilità ed instabilità solo nel caso  $F \neq mg$  ed  $m\omega^2 - k \neq 0$ .
3. Scrivere le equazioni del moto relativo di  $S$  e gli eventuali integrali primi
4. Studiare ove possibile in maniera esatta o, almeno, qualitativamente il moto di  $S$ .
5. Supposto che su  $S$  agisca l'ulteriore forza  $\{\tilde{F} = -h\dot{G}, G\}$  (con  $h > 0$ ), dire come si modificano le configurazioni di equilibrio e la relativa stabilità.
6. Nell'ipotesi di cui al punto 5. scrivere le corrispondenti nuove equazioni di Lagrange studiando i moti in prima approssimazione (sempre nel caso in cui  $F \neq mg$  ed  $m\omega^2 - k \neq 0$ ) attorno ad una eventuale configurazione di equilibrio stabile.

