

Università degli studi di Catania
 Corso di laurea Triennale in Matematica
 Prova scritta di Fisica Matematica
 Appello del 23.12.2021

Un piano verticale Π ruota uniformemente, con velocità angolare $\vec{\omega}$ attorno ad una sua retta verticale r .

Tale piano coincide con il piano coordinato xy di un riferimento ortonormale levogiro $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \equiv \{O, x, y, z\}$ con l'asse delle y verticale ascendente sovrapposto alla retta r (vedi figura).

In Π è mobile un disco S omogeneo, di massa m , raggio R e centro G , avente un estremo A di un suo diametro vincolato a muoversi sull'asse delle x .

Scegliendo come parametri lagrangiani le coordinate generali $\{X, \vartheta\}$, dove X l'ascissa del baricentro di S e ϑ l'angolo che il vettore $(G - A)$ forma con la verticale discendente (vedi figura), e che su S , oltre alla forza peso, agiscono le forze

$$\{F_1 = -K(G - \bar{G}), G\} \quad \text{ed} \quad \{F \vec{e}_1, B\} \quad \text{con} \quad K > 0, \quad F \geq 0$$

essendo \bar{G} la proiezione ortogonale di G sull'asse delle y , B il punto del disco tale che $(B - G) = \vec{e}_3 \wedge (A - G)$.

Nella ipotesi che i vincoli siano realizzati senza attrito, si chiede di:

1. Determinare sotto quali condizioni sui parametri non esistono configurazioni di equilibrio relativo per S .
2. Escludendo il caso di cui al punto 1. determinare tutte le possibili configurazioni di equilibrio relativo di S , analizzando la stabilità ed instabilità solo nel caso $F \neq mg$ ed $m\omega^2 - k \neq 0$.
3. Scrivere le equazioni del moto relativo di S e gli eventuali integrali primi
4. Studiare ove possibile in maniera esatta o, almeno, qualitativamente il moto di S .
5. Supposto che su S agisca l'ulteriore forza $\{\tilde{F} = -h\dot{G}, G\}$ (con $h > 0$), dire come si modificano le configurazioni di equilibrio e la relativa stabilità.
6. Nell'ipotesi di cui al punto 5. scrivere le corrispondenti nuove equazioni di Lagrange studiando i moti in prima approssimazione (sempre nel caso in cui $F \neq mg$ ed $m\omega^2 - k \neq 0$) attorno ad una eventuale configurazione di equilibrio stabile.

