

Università degli studi di Catania
 Corso di laurea triennale in Fisica
 Esame di Meccanica Analitica
 Appello del 15.04.2022

Un sistema materiale S , posto in un piano verticale Π , è costituito da due aste pesanti denominate rispettivamente AB e DE e da un punto materiale P . AB è un'asta omogenea di massa $M/4$ e lunghezza $4d$ che ha il suo punto medio C fisso, coincidente con l'origine O del riferimento $\{O, \vec{x}, \vec{y}\}$ rappresentato in figura nel piano Π (potendo quindi, l'asta AB , ruotare attorno al punto fisso O). DE è un'asta di massa M e lunghezza $2d$ con densità non omogenea $\rho(s) = \gamma s^2$ (essendo s la distanza di un generico punto dell'asta valutata a partire dal suo estremo D) con $\gamma > 0$ ed $0 \leq s \leq 2d$. L'asta DE ha il suo punto medio incernierato con l'estremo B dell'asta AB (potendo quindi, l'asta DE , ruotare attorno a tale punto). Infine il punto P di massa $2/3M$ è fissato sull'estremo A dell'asta AB . Sul sistema oltre alla forza peso agisce la forza elastica

$$\{F = -k(D - D'), D\} \quad \text{con } k > 0$$

essendo D' la proiezione di D sulla retta verticale passante per B . Scegliendo come coordinate lagrangiane gli angoli $\{\alpha, \beta\}$ che le aste AB e DE formano rispettivamente con le verticali discendenti passanti per i punti medi C e B delle stesse (vedi figura) si chiede di:

1. Determinare tutte le possibili configurazioni di equilibrio del sistema studiando la stabilità-instabilità, delle suddette configurazioni, solo nel caso in cui valga la condizione $Mg \neq 2kd$.
2. Scrivere le equazioni di moto, determinando gli eventuali integrali primi.
3. Studiare i moti in prima approssimazione attorno alla evidente configurazione di equilibrio $\{\alpha = 0, \beta = 0\}$.
4. Determinare dei possibili moti per i quali: l'asta DE si mantiene verticale ($\sin(\beta) = 0$), avendosi atto di moto nullo iniziale per l'asta AB ($\dot{\alpha}_0 = 0$).
5. Supponendo, infine che, a differenza dei punti precedenti, il piano Π ruoti uniformemente, con velocità angolare ω attorno all'asse \vec{y} , calcolare il potenziale centrifugo associato all'intero sistema S .

